Leçon 104 : Groupes finis. Exemple et applications.

1 Généralités et classification des groupes abéliens finis (Rombaldi, Perrin)

1.1 Définitions/Propriétés

- Ordre d'un groupe et d'un élément
- Classes à gauche/droite
- Indice + Lagrange
- Propriété sur ordre (il divise l'ordre du groupe)
- Sous-groupes distingués + ker(ϕ) distingué
- Groupe simple
- Groupe cyclique

1.2 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Définition + projection canonique
- Ordre du groupe
- Cyclique + énumération des sous-groupes
- Indicatrice Euler + nombre de générateurs du groupe
- Théorème chinois
- Structure des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et leurs inversibles
- Dév 1 : Condition de cyclicité pour $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

1.3 Théorème de structure

- Théorème
- Exemple

2 Un groupe non abélien : Le groupe $\mathcal{S}_n$ (Rombaldi)

- Définitions (groupe, cycles etc.) + cardinal
- Ordre des cycles
- Centre du groupe
- Décomposition en cycles à supports disjoints
- Système de générateurs
- Définition de la signature + $\mathcal{A}_n$
- Sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$
- Dév 2 : Simplicité de $\mathcal{A}_n$

3 Action de groupe (Perrin, Caldero-Germoni)

3.1 Action de groupe

- Définition
- Équivalence du morphisme
- Exemple basique
- Équation aux classes
- Application

3.2 Théorèmes de Sylow

- Définition
- Premier théorème de Sylow/Lemme pour le démontrer
- Autres théorèmes de Sylow
- Applications (centre p-groupes + groupe ordre 63 pas simple)

3.3 En géométrie

- Définition groupe isométrie solide
- Groupe isométries du cube